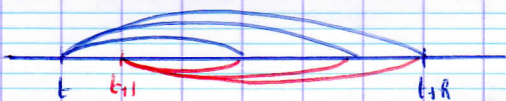


Intervalle de Prédiction de niveau $(1-\alpha)$

$$\left[\hat{X}_t(h) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma} \left(\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 \right)^{1/2} \right]$$



Estimation dans un ARMA

on fixe soit q , ou p si AR ou q si MA

commençons

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

$$AR(\infty) \quad \phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

$$\phi(B) = \frac{\pi_1(B)}{\pi_2(B)}$$

structure ARMA: structure complexe.

Cas particulier AR(p) canonique:

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

$$\phi(z) \neq 0 \text{ pour } |z| \leq 1$$

$$(1) X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$h > 0, X_{t-h}$$

$$X_{t-h} X_t - \phi_1 X_{t-h} X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-h} X_{t-p} = X_{t-h} \varepsilon_t$$

$$\mathbb{E} \left(\gamma_x(h) - \phi_1 \gamma_x(\underbrace{h+1}_{h+1}) - \dots - \phi_p \gamma_x(h-p+1) \right) = \mathbb{E}[X_{t-h} \varepsilon_t] = 0$$

à montrer

$$\phi(B) \gamma_x(h) = \mathbb{E}[X_{t-h} \varepsilon_t]$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\rho_x(h) = \frac{\gamma_x(h)}{\gamma_x(0)}$$

$$\phi(B) \rho_x(h) = \frac{\mathbb{E}[X_{t-h} \varepsilon_t]}{\gamma_x(0)} \quad h > 0$$

mg. $E[X_{t-h} \varepsilon_t] = 0$

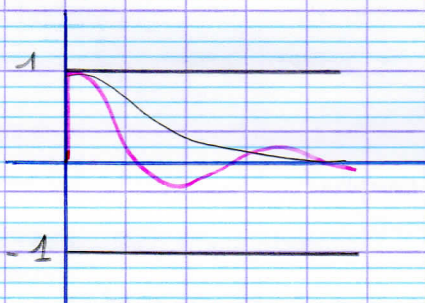
$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \psi_0 = 1$$

$$X_{t-h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-h-j}$$

$$E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-h-j}\right) \varepsilon_t\right] = 0$$

ε_t bb. donc non autocorrélée avec
les autres ε_s où $s \neq t$

$$\begin{aligned} \phi(B) \gamma_x(h) &= 0 \\ \phi(B) \rho_x(h) &= 0 \end{aligned}$$



$$\phi(B) \gamma_x(h) = 0 \quad h > 0$$

si $h=0$:

$$\begin{aligned} X_t X_t &= \phi_1 X_t X_{t-1} + \dots + \phi_p X_t X_{t-p} = X_t \varepsilon_t \\ E[X_t^2] &= \phi_1 E[X_t X_{t-1}] + \dots + \phi_p E[X_t X_{t-p}] = E[X_t \varepsilon_t] \\ \gamma_x(0) &= \phi_1 \gamma_x(1) + \dots + \phi_p \gamma_x(p) = E[X_t \varepsilon_t] \end{aligned}$$

$$E[X_t \varepsilon_t] = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}\right) \varepsilon_t\right] = E[\psi_0 \varepsilon_t^2] = \sigma^2$$

$\psi_0 = 1$

$$\gamma_x(0) - \phi_1 \gamma_x(1) - \dots - \phi_p \gamma_x(p) = \sigma^2$$

γ = autocovariance

$(x_1, \dots, x_T)$ base de données

$$\gamma_x(h) = \phi_1 \gamma_x(h-1) + \dots + \phi_p \gamma_x(h-p) \quad h > 0$$

$$\begin{cases} \gamma_x(1) = \phi_1 \gamma_x(0) + \dots + \phi_p \gamma_x(p-1) \\ \vdots \\ \gamma_x(p) = \phi_1 \gamma_x(p-1) + \dots + \phi_p \gamma_x(0) \end{cases}$$

$$\gamma_p = \begin{pmatrix} \gamma_x(1) \\ \vdots \\ \gamma_x(p) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_x(0) & \gamma_x(p-1) \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_x(p-1) & \gamma_x(0) \end{pmatrix}}_{\substack{(p,p) \\ \Gamma_{p-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix}}_{\substack{(p,1) \\ \phi}}$$

$$\gamma_p = \Gamma_{p-1} \phi$$

Si Γ_{p-1}^{-1} existe

$$\Gamma_{p-1}^{-1} \gamma_p = \phi$$

si $\hat{\Gamma}_{p-1}^{-1}$ estimateur

$$\rightarrow \hat{\phi}_{YW} = \hat{\Gamma}_{p-1}^{-1} \hat{\gamma}_p$$



estimateur de Yule Walker

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_x(0) - \gamma_p^T \hat{\phi} = \widehat{\text{Var}}(\varepsilon_t)$$

Théorème:

Si $X \sim \text{AR}(p)$, $(\varepsilon_t) \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ bs fort

$$\sqrt{T} (\hat{\phi}_{YW} - \phi) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Gamma_{p-1}^{-1})$$

Modèle linéaire $\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Phi^{-1})$

$$\text{plim} \left(\frac{X'X}{T} \right) = \Phi$$

$$\frac{X'E}{\sqrt{T}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Phi)$$

sous certaines hypothèses

Méthodes des moindres carrés

$X_t \sim \text{AR}(p)$ canonique

$(x_1, \dots, x_T)$ données.

$$\min_{(\phi_1, \dots, \phi_p)} \sum_{t=p+1}^T [x_t - (\phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p})]^2$$

$$t-p \geq 1$$

$$t \geq 1+p$$

$\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p$ par m.c.o.

max vraisemblance

NV conditionnelle, $\varepsilon_t \sim \text{iid } \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

NV $\Leftrightarrow$ m.c.o.
général

Théorème: solution NV: $\hat{\phi}_{NV} = (\hat{\phi}_1^{NV}, \dots, \hat{\phi}_p^{NV})'$

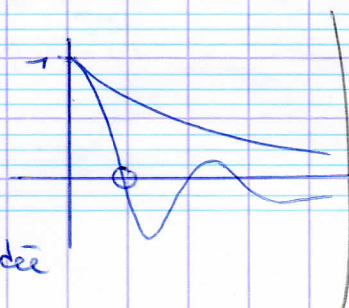
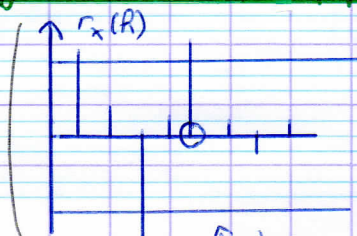
$$\sqrt{T}(\hat{\phi}_{NV} - \phi) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1})$$

② DAX

Thème: comment "spécifier" p ou q ou (p, q)

① Méthode du "général au spécifique"

T observations



↳ donne une idée

partie entière
↓

$$AR \quad p \leq \bar{p}(T) = \left\lceil 12 \left(\frac{T}{100} \right)^{2/9} \right\rceil \quad \text{Schwert}$$

conseil: si on trouve 28 → aller jusqu'à 30 pour données journalières
22 → 24 mensuelles

Hypothèse: (ε_t) ns bb gaussien, on peut utiliser des tests de significativité des coefficients ϕ_j (tests asymptotiques)
éventuellement, utiliser Y.W. ou m.c.o

$$AR(\bar{p}(T)) \quad H_0: \phi_{\bar{p}(T)} = 0$$

si OUI → on a trouvé p
NON → $AR(\bar{p}(T)-1)$, $H_0: \phi_{\bar{p}(T)-1} = 0$, etc } avec p-value

si $AR(\bar{p}(T)-n)$, $H_0: \phi_{\bar{p}(T)-n} = 0$, si oui $\tilde{p} = \bar{p}(T)-n$.

② France Telecom

② Méthode des critères d'information

X processus à valeurs dans $\mathbb{R}$

f_0 vraie loi $(x_1, \dots, x_T)$ données.

$K = \text{Kullback (Leibler)}$ $f_{p,q} \in \mathcal{F}_{ARMA(p,q)}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

$$I_K(f_0, f_{p,q}) = \mathbb{E}_{f_0} \left[\ln \left(\frac{f_0(x)}{f_{p,q}(x)} \right) \right] = \int \ln \left(\frac{f_0(x)}{f_{p,q}(x)} \right) f_0(x) dx$$

$X = (X_1, \dots, X_T)$

$$I_K(f_0, f_{p,q}) \geq 0 \quad (\text{égalité si } f_0 \in \mathcal{F}_{p,q})$$

estimateurs de I_k

$(\hat{\sigma}_\varepsilon^2$: variance résiduelle non corrigée.
lorsqu'on estime $ARMA(p, q)$)

$$AIC(p, q) = \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2(p, q)) + 2 \frac{p+q}{T}$$

↑

Akaike

→ $(p+q+1) \leq X$ non centré

$$BIC(p, q) = S(p, q) = SIC(p, q) = \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2(p, q)) + (p+q) \frac{\ln T}{T}$$

↑
Schwarz

$$HQ(p, q) = \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2(p, q)) + (p+q) \times 2 \frac{\ln T}{T}$$

↑

Hannan Quinn
1 de ces 3 critères

$$\min_{0 \leq (p, q) \leq \bar{p}(T) = \bar{q}(T)} C(p, q)$$

$AR(p)$ ($q=0$)

① verso DAX en rendement.

$\hat{p}_{AIC}$ $\hat{p}_{SIC}$ $\hat{p}_{HQ}$ peuvent être $\neq$.
il faut une croyance envers 1 des 3 critères

$$\hat{p}_{AIC} \xrightarrow{P} p \quad \lim P(\hat{p}_{AIC} > p) > 0 \quad \text{tendance à surdimensionner } p$$

$$p_0 \in J_{ARCP}$$

$$\hat{p}_{HQ} \xrightarrow{P} p$$

$$\hat{p}_{AIC} \geq \hat{p}_{SIC} \geq \hat{p}_{HQ}$$

$$\hat{p}_{SIC} \xrightarrow{P} p$$

$$\hat{p}_{AIC} \xrightarrow{P} p$$

↑
compte.