

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^* \varepsilon_{t-j}^*$$

ε^* : innovation

$$\psi_0^* = 1$$

14.12.07

Plan et explications :

ARMA(p,q), ARMA(p,q) canoniques

• fonction d'autocorrelation partielle : info sur la structure AR et "identification de l'ordre p".

• prévision (prédiction) des ARMA, commentaires

• Stationnaire ? Test de racine unité : PF, PP

exemple : (1) $Y_t = f(X_{1,t}, \dots, X_{k,t}) + \varepsilon_t$

$$(\varepsilon_t) \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$$

$$(2) \varepsilon_t / \Psi_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

$$(\psi_0, \dots \in \mathbb{N}), \psi_1 \leq \psi_{k+1}$$

$$(3) \sigma_t^2 = \text{Var}(\varepsilon_t / \Psi_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

$$q \in \mathbb{N} \quad (\text{ie filtration})$$

ARCH(q) (auto-regression conditionnellement hétéroscédastique)

Chgmt de var ds (3): $u_t := \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$

ε_t non obs. variable proxy $\hat{\varepsilon}_t^2$.

$$\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - u_t \Rightarrow \boxed{\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + u_t}$$

$$(\varepsilon_t^2) \sim \text{AR}(q)$$

$$E[\varepsilon_t / \Psi_{t-1}] = 0$$

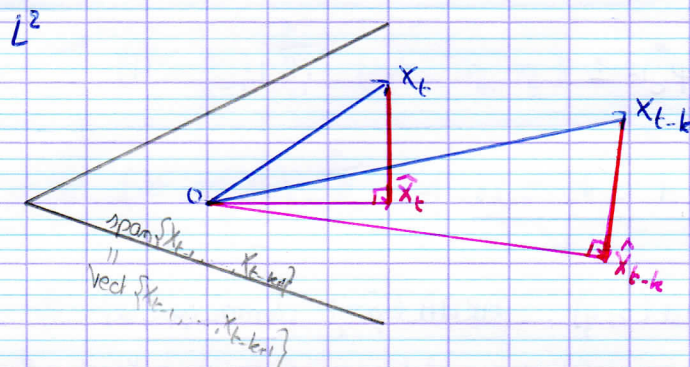
fonction d'autocorrelation partielle

à re vision :

$X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ stationnaire à valeurs ds $\mathbb{R}$, $k \geq 0$

$$\text{Correl}(X_t, X_{t-k} / X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}) = \rho(X_t, X_{t-k} / X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})$$





$$\rho_{\{X_{t-1}, \dots, X_{t-k}\}}(X_t, X_{t-k}) = \rho(X_t - \hat{X}_t, X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})$$

si $k=1 \Rightarrow r_x(1) = \rho_x(1)$

dans certains logiciels : $\hat{X}_t = E(L | X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})$

Definition: $k \mapsto r_x(k)$: fonction d'autocorrélation partielle de X

2ème vision: (Step Wise)

étape 1: $X_t = \phi_{11} X_{t-1} + \varepsilon_t^{(1)}$ on stocke ϕ_{11}

étape 2: $X_t = \phi_{21} X_{t-1} + \phi_{22} X_{t-2} + \varepsilon_t^{(2)}$ ϕ_{22}

$\vdots$

étape k: $X_t = \phi_{k1} X_{t-1} + \dots + \phi_{kk} X_{t-k} + \varepsilon_t^{(k)}$ ϕ_{kk}

$k \mapsto \phi_{kk}$ fonction d'autocorrélation partielle associée à X

équivalence entre ϕ_{kk} et $r_x(k)$

Intérêt :

AR(p) X

$$r_X(k) = 0 \quad k > p$$

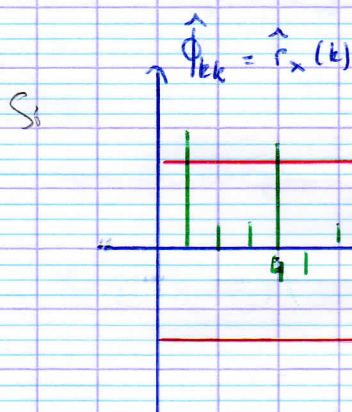
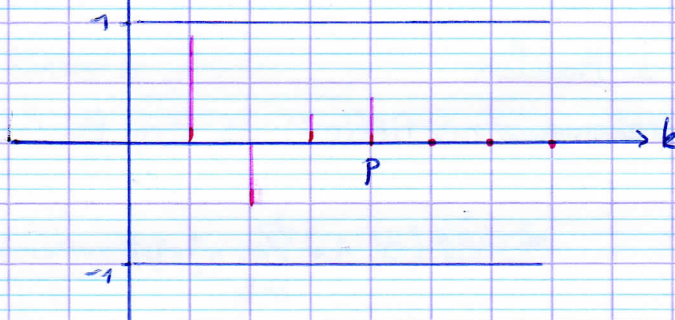
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$r_X(k) = 0$$

$$r_X(k) = \phi_{kk}$$

$$k > p$$

$$\uparrow r_X(k) = \phi_{kk}$$



B & C à 95%

alors $p=4$

on se met au plus grand décalage
pour lequel on sort, on postule AR(4)
tenir compte de l'échantillon car
(on peut avoir un rendement
qui sort hors du graphique)

Théorème de Queenouille

X stationnaire $X \sim AR(p)$

$(x_1, \dots, x_T)$ base de données

$$\sqrt{T} \hat{r}_X(k) \xrightarrow[\text{asymptotique}]{d} N(0,1) \quad \text{pour } k > p$$

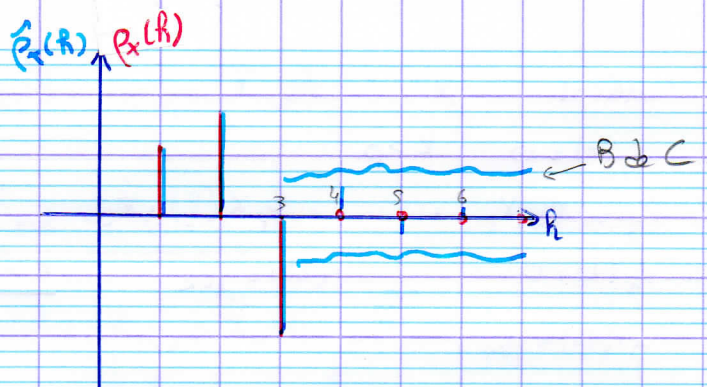
$$\text{donc } \hat{r}_X(k) \sim N(0, \frac{1}{T})$$

$$\text{d'où } B \text{ & } C \quad \alpha = 5\% : 0 \pm \frac{1.96}{\sqrt{T}}$$

Remarque : $X \sim MA(q)$

$$r_X(k) = \begin{cases} \text{non nulle pour } k \leq q \\ \text{nulle pour } k > q \end{cases} \leftarrow \text{attention on peut avoir } 0 \text{ pr } k=2 \neq 0 \text{ pr } k=3$$

Supp $q=3$



Théorème de Bartlett

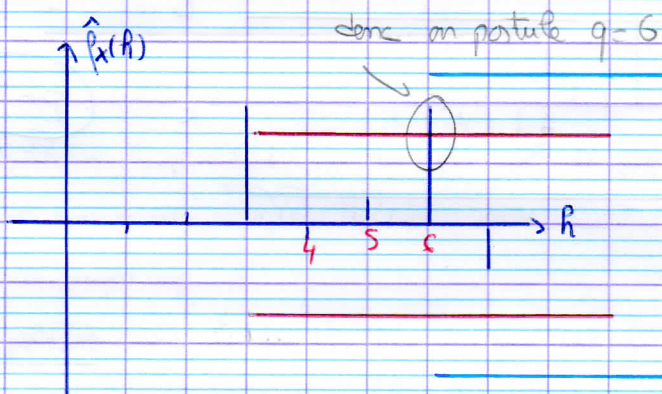
Si X stationnaire $\leadsto$ PA (q)

$(x_1, \dots, x_T)$

$$\sqrt{T} \hat{P}_x(h) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 1 + \sum_{j=1}^q c_x^2(j)\right) \quad R > q$$

$$\hat{P}_x(R) \sim \text{AWP}\left(0, \frac{1 + \sum_{j=1}^q c_x^2(j)}{T}\right) \quad R > q$$

$q=3$



$$\approx 1,96 \left(\frac{1 + \sum_{j=1}^6 \hat{P}_x(j)^2}{T} \right)$$

① DAX.

Précision (Prédiction)

Rappel:

Y var $(X_1, \dots, X_n)$

prédire Y

$$\min_{g \text{ globale}} E[Y - g(X_1, \dots, X_n)]^2$$

$$\text{sol: } E[Y | \mathcal{G}(X_1, \dots, X_n)]$$

Recherche d'une Comb. lin. optimale $\hat{CL}(X_1, \dots, X_n)$

$$\hat{Y} = \hat{CL}(X_1, \dots, X_n)$$

$X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

t présent

h horizon de prévision

X_{t+h} ? à partir de $(X_t, X_{t-1}, \dots)$

hyp.

X processus stationnaire $X \sim AR(p)$ canonique

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\phi(z) \neq 0 \quad |z| \leq 1 \quad (\text{car représentation canonique})$$

ε_t : innovations

$$\phi(B)X_t = \varepsilon_t$$

$$X_t = \phi^{-1}(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad \psi_0 = 1$$

$$X_t \in H_t(\varepsilon) \Rightarrow H_t(X) \subseteq H_t(\varepsilon)$$

H sev linéaire

$$\varepsilon_t \in H_t(X) \text{ donc } H_t(\varepsilon) = H_t(X)$$

$$X_{t+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j \varepsilon_{t+h-j} + \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}$$

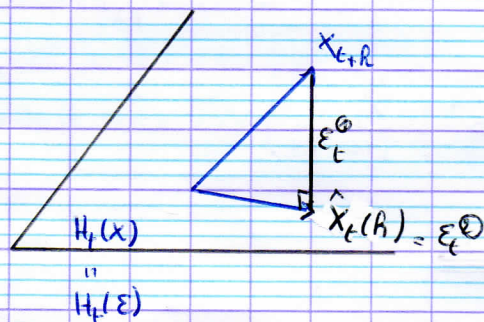
futur proche

$$\text{aut. } CL(X_t, X_{t-1}, \dots) = \hat{X}_t(h)$$

$$\sum_{j=h}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+h-j}$$

$$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$$

$$CL(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$$



projection
↓

$$\hat{X}_t(R) = P_{H_t(X)}(X_{t+R})$$

$$e_t(R) := X_{t+R} - \hat{X}_t(R)$$

$$\begin{aligned} e_t(1) &= X_{t+1} - \hat{X}_t(1) \\ &= \underbrace{\psi_0}_{\equiv 1} \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+1} \end{aligned}$$

$$e_{t-1}(1) = X_t - \hat{X}_{t-1}(1) = \varepsilon_t$$

$$\hat{X}_{t-1}(1) = P_{H_{t-1}(X)}(X_t)$$

$$\varepsilon_t = X_t - P_{H_{t-1}(X)}(X_t)$$

$$e_t(R) = X_{t+R} - \underbrace{\hat{X}_t(R)}_{H_t(X) = H_t(\varepsilon)} = \sum_{j=0}^{R-1} \psi_j \varepsilon_{t+R-j}$$

Hypothèse $(\varepsilon_t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ bruit blanc

$$\mathbb{E}[e_t(R)] = 0$$

$$\text{Var}(e_t(R)) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{R-1} \psi_j^2$$

Hypothèse: on peut estimer σ^2 et (ψ_j) .

$$\hat{\text{Var}}(e_t(R)) = \hat{\sigma}^2 \left(\sum_{j=0}^{R-1} \hat{\psi}_j^2 \right)$$

si $(\varepsilon_t) \sim$ gaussien